Eine äquiaffine Kennzeichnung der euklidischen und pseudoeuklidischen Zwangläufe

Tölke, Jürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 29, 1978, S.121-125

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eine äquiaffine Kennzeichnung der euklidischen und pseudoeuklidischen Zwangläufe

Von **Jürgen Tölke**

Vorgelegt von **Hans Robert Müller**

1. In der ebenen euklidischen Kinematik bestehen zwischen den Wendepolen W_i und den Rückkehrpolen R_i mannigfache Beziehungen [5, 6]. Bemerkenswert ist die *Trapezrelation* [3, S. 111]: Die ersten drei Wende- und Rückkehrpole bilden ein Trapez $(W_2R_2W_3R_3)$ mit den Parallelseiten W_2R_2, W_3R_3, wobei der Momentanpol P $(=W_1=R_1)$ auf der Geraden W_2R_2 liegt und $\overrightarrow{W_2R_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{W_3R_3}$ gilt. Interessanter Weise sind durch diese Figur die euklidischen und pseudoeuklidischen Zwangläufe unter den (regulären) – auf ihren natürlichen Parameter bezogenen – Äquiaffinbewegungen gekennzeichnet.

2. Den Untersuchungen liegen *äquiaffine* Bewegungen Ä(t) zugrunde [2], die in dem Sinne *regulär* seien, daß (im projektiven Abschluß) an jeder Parameterstelle drei linear unabhängige Momentanpole derart existieren, daß der endliche Momentanpol P im Parameterintervall J nicht fest ist und an keiner Stelle die Tangenten der von den Polen gebildeten Kurven mit einem Fernpol inzidieren*).

Ist die *Gangebene* (x) auf die *Rastebene* $(\bar{x})$ vermöge der Matrixgleichung

$$(1)\qquad \bar{x}=C(t)\,(x-c(t)) \quad \text{mit} \quad \mathrm{DET}\,C(t)=\text{const.}>0$$

bezogen und bezeichnet (Ableitungen nach dem reellen Bewegungsparameter $t\in J$ deuten wir durch Kringel an) $B(t):=C^{-1}\mathring{C}$ die *infinitesimale Abbildungsmatrix*, so gilt also mit $b:=\mathrm{DET}\,B(t)$

$$b\neq 0,\quad \mathrm{Spur}\,B(t)=0,\ \mathring{p}\neq 0,\quad \mathrm{DET}(\mathring{p},B\mathring{p})\neq 0$$

für alle $t\in J$, wobei p den Spaltenvektor des Gangpols P bezeichne.

3. Es erweist sich als zweckmäßig, das Norm-Differentialgleichungssystem der Gangpolbahn zu verwenden. Nach [7] gilt

$$(2)\qquad \mathring{\mathring{p}}=\alpha\mathring{p}-\frac{1}{1-m}B\mathring{p},$$

wobei $\alpha=\alpha(t)$ eine „willkürliche" Parameterfunktion und die absolute Invariante $m=m(t)\neq 1$ der Ähnlichkeitsmodul der bezüglich dem Momentanzentrum zentrisch ähnlichen Polbahnkrümmungskegelschnitte ist [4, 8]. Eine weitere Deutung von m(t) haben wir in [7] angegeben.

*) Wir setzen Ä(t) von der Differenzierbarkeitsklasse C^3 voraus.

4. Für den zugehörigen inversen Bewegungsvorgang gilt

$$(1') \qquad x = C^{-1}(t)\,(\bar{x} - \bar{c}(t)) \quad \text{mit} \quad \bar{c}(t) := -C(t)c(t).$$

Gang- und Rastebene von Ä(t) haben ihre Rollen vertauscht. Mit der zugehörigen infinitesimalen Abbildungsmatrix

$$\bar{B}(t) := -C(t)B(t)C^{-1}(t)$$

folgt aus (2) für die *Rastpolbahn* von Ä(t) das Differentialgleichungssystem

$$(2') \qquad \overset{\circ\circ}{\bar{p}} = \alpha\overset{\circ}{\bar{p}} + \frac{m}{1-m}\bar{B}\overset{\circ}{\bar{p}}.$$

5. In der euklidischen Kinematik heißen Bewegungsparameter mit $b = \text{const.}$ *natürliche Parameter.* Analog bezeichnen wir für reguläre Äquiaffinbewegungen den durch

$$\tau := \int^t \sqrt{eb(t)}\,dt, \quad \operatorname{sgn}(eb(t)) > o,\ e = \text{const.}$$

definierten Parameter als den *natürlichen.* Solche Parameter wurden erstmals von W. BLASCHKE [2, S. 43] verwand.

Im Folgenden legen wir stets einen natürlichen Parameter zugrunde (entsprechende Funktionen seien durch dasselbe Symbol bezeichnet und Ableitungen durch Punkte angedeutet).

6. Nach [9] verstehen wir analog zum Euklidischen unter dem *n-ten Wendepol* W_n bzw. unter dem *n-ten Rückkehrpol* R_n jenen Punkt, dessen n-ter Führungsgeschwindigkeitsvektor

$$\overset{n}{v}_f(x) := C^{-1}\overset{(n)}{\bar{x}} \quad \text{bzw.} \quad \overset{n}{\bar{v}}_f(\bar{x}) := C\overset{(n)}{x}$$

von Ä(τ) bzw. $Ä^{-1}(\tau)$ verschwindet. Die Existenz und die endliche Lage der im folgenden vorkommenden Wende- bzw. Rückkehrpole sei vorausgesetzt. Offenbar stimmt der 1. Wendepol und der 1. Rückkehrpol mit dem Momentanzentrum überein.

Mit (1) und (1′) folgt sofort

$$\overset{2}{v}_f(x) = -b(x-p) - B\dot{p} + \dot{B}(x-p) \quad \text{bzw.} \quad \overset{2}{\bar{v}}_f(\bar{x}) = -b(\bar{x}-\bar{p}) - \bar{B}\dot{\bar{p}} + \dot{\bar{B}}(\bar{x}-\bar{p}).$$

Daraus gewinnen wir im lokalen Koordinatensystem

$$x = p + x_1\dot{p} + x_2B\dot{p} \quad \text{oder} \quad \bar{x} = \bar{p} + x_1\dot{\bar{p}} - x_2\bar{B}\dot{\bar{p}}$$

mit der Abkürzung

$$(3) \qquad \dot{B}\dot{p} := b_1\dot{p} + b_2B\dot{p} \quad \text{also} \quad \dot{\bar{B}}\dot{\bar{p}} = -b_1\dot{\bar{p}} + b_2\bar{B}\dot{\bar{p}}$$

die Darstellungen

$$(4) \qquad \overset{2}{v}_f(x) = \left\{(b_1-b)x_1 + bb_2x_2\right\}\dot{p} + \left\{b_2x_1 - (b_1+b)x_2 - 1\right\} B\dot{p}$$

bzw.

$$(4') \qquad \overset{2}{\bar{v}}_f(\bar{x}) = -\left\{(b_1+b)x_1 + bb_2x_2\right\}\dot{\bar{p}} + \left\{b_2x_1 + (b-b_1)x_2 - 1\right\} \bar{B}\dot{\bar{p}}.$$

Hiermit folgt unter Beachtung der *Rastbedingungen* ($\dot{x}=0$ bzw. $\dot{\bar{x}}=0$)

$$-\dot{x}_1 = 1 + x_1 + (\frac{b}{1-m} + b_1)x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{1-m}x_1 - (\alpha+b_2)x_2$$

bzw.

$$-\dot{x}_1 = 1 + x_1 + (\frac{mb}{1-m} + b_1)x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{m}{1-m}x_1 - (\alpha+b_2)x_2$$

nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned}\overset{3}{v}_f(x) = \Big\{&-2b_1 + \frac{1-2m}{1-m}b + (\dot{b}_1 + b_1b_2 + \frac{1+m}{1-m}bb_2)x_1 + (b\dot{b}_2 - 2b_1^2 - bb_2^2 + b^2 -\\ &-\frac{1+m}{1-m}bb_1)x_2\Big\}\dot{p} + \Big\{-(\alpha+2b_2) + (\dot{b}_2 + b_2^2 - b - \frac{1+m}{1-m}b_1)x_1 -\\ &-(\dot{b}_1 + b_1b_2 + \frac{1+m}{1-m}bb_2)x_2\Big\}B\dot{p}\end{aligned} \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned}\overset{3}{v}_f(\bar{x}) = \Big\{&2b_1 + \frac{2-m}{1-m}b - (\dot{b}_1 + b_1b_2 + \frac{1+m}{1-m}bb_2)x_1 - (b\dot{b}_2 - 2b_1^2 - bb_2^2 + b^2 -\\ &-\frac{1+m}{1-m}bb_1)x_2\Big\}\dot{\bar{p}} + \Big\{-(\alpha+2b_2) + (\dot{b}_2 + b_2^2 - b - \frac{1+m}{1-m}b_1)x_1 -\\ &-(\dot{b}_1 + b_1b_2 + \frac{1+m}{1-m}bb_2)x_2\Big\}\bar{B}\dot{\bar{p}}.\end{aligned} \tag{5'}$$

Aus (4) bzw. (4′) folgt für den 2. Wendepol W_2 bzw. den 2. Rückkehrpol R_2, im Gangsystem von $\ddot{A}(\tau)$, die Darstellung

$$w_2 = p + (b_1^2 + bb_2^2 - b^2)^{-1}\left\{bb_2\dot{p} + (b-b_1)B\dot{p}\right\} \tag{6}$$

bzw.

$$r_2 = w_2 - 2b(b_1^2 + bb_2^2 - b^2)^{-1}B\dot{p}, \tag{6'}$$

so daß das Momentanzentrum genau dann beständig auf W_2R_2 liegt, wenn im zugrunde liegenden Parameterintervall

$$b_2 = 0 \tag{7}$$

gilt. Hiermit liefern (5) und (5′)

$$\begin{aligned}r_3 = w_3 + 3b\left[\dot{b}_1^2 - (b + \frac{1+m}{1-m}b_1)(2b_1^2 + b^2 - \frac{1+m}{1-m}bb_1)\right]^{-1}\Big\{&\dot{b}_1\dot{p} -\\ -(b + \frac{1+m}{1-m}b_1)B\dot{p}\Big\}&.\end{aligned} \tag{8}$$

Die Geraden W_2R_2 und W_3R_3 sind also genau dann beständig parallel, wenn $\dot{b}_1$ identisch verschwindet. Soll überdies noch $\overrightarrow{W_2R_2} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{W_3R_3}$ gelten, so führt dies nach (6′), (8) auf

$$(b_1 + \frac{1+m}{1-m}b)b_1 = 0.$$

Dies ist genau dann für sämtliche reguläre Äquiaffinbewegungen erfüllt (d.h. gilt für alle $m(\tau)$), wenn

$$b_1 = 0 \tag{9}$$

für alle τ gilt. Nun sind die Fernpole einer regulären Affinbewegung genau dann fest, d.h. es handelt sich genau dann um äquiforme euklidische bzw. pseudoeuklidische Zwangläufe, wenn mit den Bezeichnungen (3) und den Abkürzungen a: = Spur B(t), b: = DET B(t) die beiden Halbinvarianten

$$H_1 := 2b_1 + ab_2 - \mathring{a}, \quad H_2 := \mathring{b} - 2bb_2 - ab_1$$

in J verschwinden. Damit liefern (7) und (9): *Die eingangs beschriebene Trapezrelation ist genau dann für alle regulären, auf natürliche Parameter bezogene Äquiaffinbewegungen gültig, wenn es sich um euklidische oder pseudoeuklidische Zwangläufe handelt.*

7. Für *spezielle* Bewegungen Ä(τ) kann die Trapezrelation natürlich erfüllt sein. Für solche Bewegungen gilt neben (7) noch

$$(10) \qquad b_1 = -\frac{1+m}{1-m}\, b \quad \text{mit } m = \text{const.},$$

wobei – wegen der vorausgesetzten Existenz und der endlichen Lage der Pole W_i, R_i $(i = 1,2,3)$ – $m \notin \{0, 1, -1, \infty\}$ gilt. Die Bewegungen (10) besitzen eine einfache geometrische Deutung. Dazu betrachten wir die Klasse der regulären, äquiaffinen $S^{(m)}$-Bewegungen [7] (d.h. m = const.). Um Anschluß an die Formeln von W. BLASCHKE [3, S. 14] zu erhalten, denken wir uns DET C(t) zu Eins normiert. Hiermit berechnen sich die *Affinkrümmungen* $\varkappa_p, \varkappa_{\bar{p}}$ der Gang- bzw. Rastpolbahn zu

$$\varkappa_p = \left\{\frac{1-m}{\mathrm{DET}\,(\mathring{p}, B\mathring{p})}\right\}^{2/3} \left[\frac{b}{(1-m)}2 + \frac{b_1}{1-m} + \sigma\right], \quad 9\,\sigma := \alpha(\alpha + b_2) - 2b_2^2 + 3(\mathring{b}_2 - \mathring{\alpha})$$

$$\varkappa_{\bar{p}} = \left\{\frac{1-m}{m\,\mathrm{DET}\,(\mathring{p}, B\mathring{p})}\right\}^{2/3} \left[\frac{m^2 b}{(1-m)}2 + \frac{m b_1}{1-m} + \sigma\right].$$

In der Klasse der regulären, äquiaffinen $S^{(m)}$-Bewegungen sind die Affinbewegungen mit (10) durch

$$\varkappa_p = m^{2/3} \varkappa_{\bar{p}}$$

gekennzeichnet. Insbesondere gibt es hierunter solche, deren Polbahnen *Kegelschnitte* sind. Die Dinge sollen hier nicht weiter verfolgt werden.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Affine Differentialgeometrie. Berlin 1923.

[2] BLASCHKE, W.: Über affine Kinematik, Sammelband zum 200. Geburtstag von L. EULER. Berlin 1959.

[3] BLASCHKE, W. und MÜLLER, H.R.: Ebene Kinematik. München 1956.

[4] MÜLLER, H.R.: Die Formel von Euler-Savary in der affinen Kinematik. Arch. Math. **10** (1959) 71–80.

[5] STEWARD, G.C.: On the cardinal points in plane kinematics. Transact. Roy. Soc. London Ser. A **244** (1951) 19–46.

[6] STEWARD, G.C.: On certain configurations of the cardinal points in plane kinematics. Acta math. **88** (1952) 371–383.
[7] TÖLKE, J.: Eine äquiaffine Charakterisierung der euklidischen Bewegungen vermöge einander oskulierender Hüllkurvenpaare. Arch. Mat. **28** (1977) 544–549.
[8] TÖLKE, J.: Affine Kinematik der Ebene. Diss. Karlsruhe 1967.
[9] TÖLKE, J.: Eine äquiaffine Charakterisierung der CARDAN Bewegung mittels der höheren Wendepole. Mh. Math. im Druck.